

1 Manipulation des symboles sommes et produits

Exercice 1 ★ Écrire à l'aide du symbole somme –

Écrire à l'aide du symbole somme les sommes suivantes :

1. $2^3 + 2^4 + \dots + 2^{12}$.
2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{10}{1024}$.
3. $2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$.
4. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3018]

Exercice 2 ★ Différence de deux sommes –

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Simplifier $u_{n+1} - u_n$ puis étudier la monotonie de (u_n) .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3019]

Exercice 3 ★ Changement d'indice –

Soit $n \geq 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln \left(\sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(\sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3020]

Exercice 4 ★★ Changement d'indice magique –

Calculer la somme $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3026]

Exercice 5 ★★ Simplifier ! –

Simplifier les sommes et produits suivants :

1. $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$
2. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$
3. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[446]

Exercice 6 ★ Télescopage –

Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}.$$

En déduire la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[449]

Exercice 7 ★★ Somme télescopique et factorielle –

En utilisant une somme télescopique, calculer $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3021]

Exercice 8 ★★★ **Transformer en somme télescopique –**

1. Déterminer une suite $(u_k)_{k \geq 0}$ telle que, pour tout $k \geq 0$, on ait

$$u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k.$$

2. En déduire, pour tout $n \geq 0$, la valeur de $\sum_{k=0}^n (k+2)2^k$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3022]

Exercice 9 ★ **Somme et factorielles –**

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(n+1)! \geq \sum_{k=1}^n k! \quad .$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[448]

Exercice 10 ★★★ **Somme et somme des carrés –**

Soit $n \geq 1$ et x_1, \dots, x_n des réels vérifiant

$$\sum_{k=1}^n x_k = n \text{ et } \sum_{k=1}^n x_k^2 = n.$$

Démontrer que, pour tout k dans $\{1, \dots, n\}$, $x_k = 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[451]

2 Calcul de sommes et de produits

Exercice 11 ★ **Somme des entiers –**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$a_n = \sum_{k=1}^n k, \quad b_n = \sum_{k=1}^n k^2 \text{ et } c_n = \sum_{k=1}^n k^3.$$

Démontrer que $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, que $b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et que $c_n = a_n^2$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[447]

Exercice 12 ★ **Calculs de sommes arithmétiques –**

Calculer les somme suivantes :

1. $A_n = \sum_{k=1}^n 3$.
2. $B_n = \sum_{k=1}^n A_k$.
3. $S_n = \sum_{k=0}^n (2k+1)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3040]

Exercice 13 ★ **Calculs de sommes géométriques –**

Calculer les sommes suivantes :

1. $S = \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{2^{30}} + \dots + \frac{1}{2^{1000}}$.
2. $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3041]

Exercice 14 ★ **Calcul de sommes par changements d'indice –**

Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^n (n-k+1).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3042]

Exercice 15 ★ **Calcul de sommes avec indices négatifs –**

Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=-5}^{15} k(10-k).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2605]

Exercice 16 ★ **Se ramener à une somme classique –**

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$. Calculer explicitement u_n , puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3023]

Exercice 17 ★★ **Un produit –**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(-n)$?
2. Démontrer que pour tout réel non-nul x , on a

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient du binôme.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[450]

Exercice 18 ★★ **Somme géométrique dans tous ses états –**

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{2n} u_k; \quad \sum_{k=0}^{2n+1} u_k; \quad \sum_{k=0}^n u_{2k}; \quad \sum_{k=0}^{2n} (u_k + n); \quad \left(\sum_{k=0}^{2n} u_k \right) + n; \quad \sum_{k=0}^n u_{k+n}; \quad \sum_{k=0}^n u_{kn}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[452]

Exercice 19 ★ **Sommes alternées –**

1. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$ en faisant des sommations par paquets.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}.$$

Retrouver le résultat précédent.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[453]

Exercice 20 ★★★ **Somme de puissances –**

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.
2. En déduire la valeur de $T_n(x) = \sum_{k=0}^n kx^k$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[455]

Exercice 21 ★★★★★ Sommation d'Abel –

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1. Démontrer que $\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n 2^k k$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[456]

3 Sommes doubles

Exercice 22 ★★ Comment permuter une somme double ? –

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres réels. Soit n et m deux entiers naturels. Intervertir les sommes doubles suivantes :

1. $S_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}$;
2. $S_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j}$;
3. $S_3 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^m a_{i,j}$ où on a supposé $n \leq m$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2300]

Exercice 23 ★★ Quelques sommes doubles –

Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$.
2. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3024]

Exercice 24 ★★★★★ Application des sommes doubles –

En écrivant que

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 2^k,$$

calculer $\sum_{k=1}^n k 2^k$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3025]

Exercice 25 ★★★★★ Sommes doubles –

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$a_n = \sum_{k=1}^n k, \quad b_n = \sum_{k=1}^n k^2 \text{ et } c_n = \sum_{k=1}^n k^3.$$

Pour cet exercice, on admettra que $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, que $b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et que $c_n = a_n^2$.

1. Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.
2. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[454]

4 Coefficients binômiaux - formule du binôme

Exercice 26 ★ Factorielle et coefficients binomiaux –

1. Soient $n, p \geq 1$. Démontrer que

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et a, b réels non nuls, simplifier les expressions suivantes :

$$1. (n+1)! - n! \quad 2. \frac{(n+3)!}{(n+1)!} \quad 3. \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \quad 4. \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ où } u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[457]

Exercice 27 ★★★ Égalité de coefficients binômiaux –

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour quels entiers $p \in \{0, \dots, n-1\}$ a-t-on $\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1}$?

2. Soit $p \in \{0, \dots, n\}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $q \in \{0, \dots, n\}$ a-t-on $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[458]

Exercice 28 ★ Formule du binôme –

1. Développer $(x+1)^6$, $(x-1)^6$.

2. Démontrer que, pour tout entier n , on a $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$.

3. Démontrer que, pour tout entier n , on a $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p = 3^n$.

4. Démontrer que, pour tout entier n , on a $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[460]

Exercice 29 ★★ Autour de la formule du binôme –

1. Quel est le coefficient de a^2b^4c dans le développement de $(a+b+c)^7$?

2. Calculer la somme

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n}.$$

3. Soient p, q, m des entiers naturels, avec $q \leq p \leq m$. En développant de deux façons différentes $(1+x)^m$, démontrer que

$$\binom{m}{p} = \binom{m-q}{p} + \binom{q}{1} \binom{m-q}{p-1} + \dots + \binom{q}{k} \binom{m-q}{p-k} + \dots + \binom{m-q}{p-q}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[461]

Exercice 30 ★★★ Une somme –

Soient n, p des entiers naturels avec $n \geq p$. Démontrer que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[462]

Exercice 31 ★★ Formule du trinôme –

Quel est le coefficient de $x^a y^b z^c$ dans le développement de l'expression $(x + y + z)^n$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2742]

Exercice 32 ★★★★★ Avec des polynômes –

Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[464]

Exercice 33 ★★★★★ Une somme à partir de la formule du binôme –

L'objectif de l'exercice est de démontrer la (surprenante !) formule suivante :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Soit x un réel non nul. Démontrer que

$$\frac{1 - (1-x)^n}{x} = \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p.$$

2. On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Démontrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = - \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p.$$

3. Conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2603]

Exercice 34 ★★★★★ Équation de Pell-Fermat –

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de solutions avec x, y des entiers naturels.

1. Soit $n \geq 1$. Démontrer qu'il existe deux entiers x_n et y_n tels que $(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}y_n$.
2. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .
3. En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.
4. Démontrer le résultat annoncé.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[465]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Indication pour l'exercice 2 ▲

Il reste uniquement trois termes.

Indication pour l'exercice 3 ▲

On pourra utiliser que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. Attention ! Il y a deux possibilités pour effectuer le changement d'indices. L'une amène plus facilement au résultat.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Séparer la somme en deux, puis faire un changement d'indices dans la deuxième somme.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Les sommes et produits sont "télescopiques", c'est-à-dire que de nombreux termes vont se simplifier. Plus précisément

1. Utiliser $\ln(ab) = \ln a + \ln b$;
2. Factoriser $k^2 - 1$.
3. Écrire

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}.$$

Indication pour l'exercice 6 ▲

Mettre au même dénominateur. On trouve alors que S_n vaut la différence de deux sommes qui se simplifient.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Écrire $k = (k+1) - 1$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Chercher u_k sous la forme $u_k = (ak + b)2^k$.
 - 2.
-

Indication pour l'exercice 9 ▲

Utiliser que $k! \leq n!$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Calculer $\sum_{k=1}^n (1 - x_k)^2$.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Procéder par récurrence sur n .

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. On somme des termes constants.
2. Utiliser la linéarité.
3. Utiliser la linéarité.

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Écrire S à l'aide du symbole \sum , puis utiliser la formule donnant la somme d'une série géométrique.
 2. Se ramener à une somme géométrique.
-

Indication pour l'exercice 14 ▲

Faire le changement d'indice $\ell = n - k + 1$.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Développer le terme à l'intérieur de la somme, trouver deux sommes, et calculer chacune des deux sommes (éventuellement en la coupant en deux).

Indication pour l'exercice 16 ▲

On peut mettre $1/n^2$ en facteur.

Indication pour l'exercice 17 ▲

- 1.
 - 2.
 3. Séparer en un produit au numérateur et un produit au dénominateur.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

Bien observer les notations, et se rappeler de la formule donnant une somme géométrique.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Regrouper les termes deux par deux.
 - 2.
-

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Somme géométrique, sauf pour $x = 1$.
 2. Dériver S_n .
-

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. Remplacer a_k par $A_k - A_{k-1}$. On obtient deux sommes. Les séparer et changer d'indice dans l'une des deux sommes.
 2. Poser $a_k = 2^k$.
-

Indication pour l'exercice 22 ▲

Faire un dessin pour représenter les indices i, j sur lesquels on fait la somme.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Faire apparaître un produit.
 2. Mettre la somme sur i à l'intérieur...
-

Indication pour l'exercice 24 ▲

Permuter les sommes !

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Faire un dessin pour représenter sur quels entiers porte la somme.
 2. Poser, pour i fixé, $S_i = \sum_{j=1}^n \min(i, j)$ et calculer la valeur de S_i .
-

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. Utiliser une expression des coefficients binômiaux.
 2. Factoriser...
-

Indication pour l'exercice 27 ▲

1. Faire le quotient.
 2. Utiliser la question précédente.
-

Indication pour l'exercice 28 ▲

1. Utiliser la formule du binôme.
 2. $2^n = (1+1)^n$.
 3. $2^p = 1^{n-p} 2^p$.
 4. Utiliser que $(-1)^k = (-1)^{2n-k}$ et que $2^{k-1} = \frac{1}{2} 2^k$.
-

Indication pour l'exercice 29 ▲

1. Développer d'abord sous la forme $((a+b)+c)^7$.
 2. Développer $(1+x)^n$ et intégrer!
 3. $(1+x)^m = (1+x)^q (1+x)^{m-q}$, et calculer le coefficient devant x^p .
-

Indication pour l'exercice 30 ▲

Procéder par récurrence.

Indication pour l'exercice 31 ▲

Appliquer deux fois la formule du binôme.

Indication pour l'exercice 32 ▲

Pour S_n , introduire les polynômes $P(x) = (x+1)^n$, $Q(x) = (x-1)^n$ et chercher le coefficient devant x^n du produit PQ de deux façons différentes. Pour calculer T_n , on pourra étudier le produit PP' .

Indication pour l'exercice 33 ▲

1. Reconnaître une somme géométrique.
 2. Dériver "normalement", puis appliquer la formule du binôme, puis se ramener à la question précédente.
 3. Intégrer pour retrouver la fonction à partir de sa dérivée.
-

Indication pour l'exercice 34 ▲

1. C'est une conséquence de la formule du binôme.
 2. Développer $(3+2\sqrt{2})^{n+1}$ de deux façons différentes.
 - 3.
 4. Prouver que $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$ en utilisant $(3-2\sqrt{2})^n$.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $\sum_{k=3}^{12} 2^k$.

2. $\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{2^k}$.

3. En remarquant que $2 = 2 \times 1$, $4 = 2 \times 2$, jusque $50 = 2 \times 25$, et que devant les termes du type $2k$, où k est impair, on a un signe $+$ et devant les termes du type $2k$, où k est pair, on a un signe $-$, on peut écrire la somme $\sum_{k=1}^{25} (-1)^{k+1} \times 2k = 2 \sum_{k=1}^{25} (-1)^{k+1} k$.

4. $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Lorsqu'on calcule $u_{n+1} - u_n$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k},$$

on s'aperçoit que tous les termes se simplifient, hormis les deux derniers de la première somme, et le premier de la deuxième somme. On trouve donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}.$$

On peut ensuite mettre tout au même dénominateur pour étudier la monotonie de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n(2n+2) + n(2n+1) - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{2n^2 + 2n + 2n^2 + n - 4n^2 - 6n - 2}{n(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{-3n - 2}{n(2n+1)(2n+2)} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est décroissante.

Correction de l'exercice 3 ▲

Il y a deux possibilités naturelles pour effectuer le changement d'indice et obtenir les bonnes bornes. On peut poser $j = k - n$, ou $j = 2n - k$. Le deuxième choix permet plus facilement d'arriver au résultat. Posons donc $j = 2n - k \iff k = 2n - j$. Alors si $k = n + 1$, on a $j = 2n - (n + 1) = n - 1$ et si $k = 1$, on a $j = 2n - 1$. On effectue donc une somme pour j allant de 1 à $n - 1$ et on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln \left(\sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right) &= \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(\sin \left(\frac{(2n-j)\pi}{2n} \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(\sin \left(\pi - \frac{j\pi}{2n} \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(\sin \left(\frac{j\pi}{2n} \right) \right) \end{aligned}$$

en utilisant la formule $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. C'est exactement le résultat demandé.

Correction de l'exercice 4 ▲

On commence par séparer la somme en deux :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k}.$$

On effectue ensuite le changement d'indices $j = n + 1 - k$ dans la deuxième somme. On a

$$1 \leq k \leq n \iff -1 \geq -k \geq -n \iff n \geq n + 1 - k \geq 1.$$

La deuxième somme devient donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On trouve finalement

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) = 0.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. On commence par remarquer que

$$\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) &= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln(k) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) \\ &= \ln(n+1). \end{aligned}$$

2. On commence par remarquer que

$$\left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) &= \frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \prod_{k=2}^n (k+1)}{(\prod_{k=2}^n k)^2} \\ &= \frac{(n-1)! \times \frac{1}{2} \times (n+1)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

3. On commence par remarquer que

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}.$$

On raisonne alors exactement comme pour la première somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+3} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

On réduit au même dénominateur, et on trouve

$$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3} = \frac{(a+b)k + (3a+b)}{(k+1)(k+3)}.$$

Par identification, on cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ 3a+b &= 1 \end{cases}$$

dont la seule solution est $a = 1/2$, $b = -1/2$. On en déduit

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{3n^2 + 11n + 8}{4(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour faire apparaître une somme télescopique, on va écrire $k = (k+1) - 1$. Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \cdot k! &= \sum_{k=1}^n (k+1-1) \cdot k! \\ &= \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) \\ &= (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On va chercher u_k sous la forme $u_k = (ak+b)2^k$. On a alors

$$u_{k+1} - u_k = (a(k+1)+b)2^{k+1} - (ak+b)2^k = (2ak+2a+2b-ak-b)2^k = (ak+2a+b)2^k.$$

On obtient donc le résultat si on choisit $a = 1$ et $b = 0$.

2. Il s'agit maintenant d'une simple somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+2)2^k &= \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) \\ &= u_{n+1} - u_0 \\ &= (n+1)2^{n+1}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Pour chaque entier k dans $\{1, \dots, n\}$, on a $k! \leq n!$. On obtient donc

$$\sum_{k=1}^n k! \leq \sum_{k=1}^n n! = n \times n!$$

puisque la somme de droite est une somme de termes constants. Puisque $n \leq n+1$, on obtient bien

$$\sum_{k=1}^n k! \leq (n+1) \times n! = (n+1)! \quad .$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Calculons $\sum_{k=1}^n (1 - x_k)^2$:

$$\sum_{k=1}^n (1 - x_k)^2 = \sum_{k=1}^n 1 - 2 \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n x_k^2 = n - 2n + n = 0.$$

Or, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $(1 - x_k)^2 \geq 0$ et on sait qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nul. On en déduit le résultat demandé.

Correction de l'exercice 11 ▲

On procède simplement par récurrence sur n . Voyons d'abord pourquoi la formule est vraie pour a_n . Elle est vraie pour $n = 1$ (car $1 = \frac{1 \times 2}{2}$). Soit $n \in \mathbb{N}$ telle qu'elle est vraie au rang n et prouvons-la au rang $n+1$. Alors,

$$a_{n+1} = a_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \times \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$ et par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$. Le raisonnement est rigoureusement identique pour b_n et pour c_n . Voyons par exemple le cas de c_n . Comme précédemment, la formule est vraie au rang 1, et si elle est vraie au rang n , alors

$$c_{n+1} = c_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right).$$

Il suffit alors pour conclure de remarquer que

$$\frac{n^2}{4} + (n+1) = \frac{(n+2)^2}{4}.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$ ce qui clôt la démonstration par récurrence.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. On somme des termes constants, et il y a n termes dans la somme, donc $A_n = 3n$.

2. Par linéarité,

$$B_n = 3 \sum_{k=1}^n k = \frac{3n(n+1)}{2}.$$

3. On raisonne également par linéarité :

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\ &= n(n+1) + (n+1) \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. On remarque que

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2^{10k}} = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{2^{10}} \right)^k.$$

Par la formule donnant la somme d'une suite géométrique, on trouve

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{2^{1010}}}{1 - \frac{1}{2^{10}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^{1000}}}{2^{10} - 1} \\ &= \frac{2^{1000} - 1}{2^{1000}(2^{10} - 1)}. \end{aligned}$$

2. On factorise par $1/6$ pour se ramener à une somme géométrique.

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3} \right)^k = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{2}.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

Effectuons le changement d'indices $\ell = n - k + 1$. Lorsque k varie de 1 à n , alors ℓ varie aussi de 1 à n . On a donc

$$\sum_{k=1}^n (n+1-k) = \sum_{\ell=1}^n \ell = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

On écrit en développant le produit

$$\sum_{k=-5}^{15} k(10-k) = 10 \sum_{k=-5}^{15} k - \sum_{k=-5}^{15} k^2.$$

Étudions ensuite la première somme en la découpant en deux :

$$S_1 = \sum_{k=-5}^{15} k = \sum_{k=-5}^0 k + \sum_{k=1}^{15} k$$

Dans la première de ces deux sommes, on fait le changement de variables $\ell = -k$. Lorsque k va de -5 à 0 , ℓ va de 0 à 5 . On trouve donc que

$$\begin{aligned} S_1 &= - \sum_{\ell=0}^5 \ell + \sum_{k=1}^{15} k \\ &= - \frac{5 \times 6}{2} + \frac{15 \times 16}{2} \\ &= 105. \end{aligned}$$

Pour la deuxième somme, on fait le même raisonnement :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=-5}^{15} k^2 = \sum_{k=-5}^0 k^2 + \sum_{k=1}^{15} k^2 \\ &= \sum_{\ell=0}^5 (-\ell)^2 + \sum_{k=1}^{15} k^2 \\ &= \sum_{\ell=0}^5 \ell^2 + \sum_{k=1}^{15} k^2 \\ &= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = 1295. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\sum_{k=-5}^{15} k(10-k) = 1050 - 1295 = -245.$$

On peut vérifier cette somme par un petit programme Python : `S=0 for k in range(-5,16): S+=k*(10-k) print(S)`

Correction de l'exercice 16 ▲

En mettant $1/n^2$ en facteur, on se ramène à une somme classique. En effet, on peut écrire

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Ainsi, la suite (u_n) tend vers $1/2$.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. On a $P_n(0) = 1$ (on ne fait que des produits de 1), $P_n(-n) = 0$, car alors

$$1 + \frac{-n}{n} = 0$$

et donc on a un terme nul dans le produit. Enfin,

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2 \times 3 \times \dots \times (n+1)}{1 \times 2 \times \dots \times n} = n+1.$$

2. On a

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \prod_{k=1}^n \frac{x+k}{k} \\ &= \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{1 \times 2 \times \dots \times n} \\ &= \frac{x+n}{x} \times \frac{(x-1+1)(x-1+2)\dots(x-1+n)}{1 \times 2 \times \dots \times n} \\ &= \frac{x+n}{x} P_n(x-1). \end{aligned}$$

3. On a

$$P_n(p) = \prod_{k=1}^n \frac{k+p}{k} = \frac{(p+1)\dots(p+n)}{n!} = \frac{(n+p)!}{n!p!} = \binom{n+p}{p}.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

Dans cet exercice, il faut faire très attention aux notations, puis appliquer la formule de la somme d'une série géométrique. Il vient alors

$$\sum_{k=0}^{2n} u_k = \sum_{k=0}^{2n} (-2)^k = \frac{1 - (-2)^{2n+1}}{1 - (-2)} = \frac{1 + 2^{2n+1}}{3}.$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} u_k = \frac{1 - 2^{2n+2}}{3}.$$

$$\sum_{k=0}^n u_{2k} = \sum_{k=0}^n 4^k = \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

$$\sum_{k=0}^{2n} (u_k + n) = \sum_{k=0}^{2n} u_k + \sum_{k=0}^{2n} n = \frac{1 + 2^{2n+1}}{3} + n(2n+1).$$

$$\left(\sum_{k=0}^{2n} u_k\right) + n = \frac{1 + 2^{2n+1}}{3} + n.$$

$$\sum_{k=0}^n u_{k+n} = \sum_{k=0}^n (-2)^{k+n} = (-2)^n \sum_{k=0}^n (-2)^k = \frac{(-2)^n (1 - (-1)^{n+1} 2^{n+1})}{3}.$$

$$\sum_{k=0}^n u_{kn} = \sum_{k=0}^n ((-2)^n)^k = \frac{1 - (-2)^{n(n+1)}}{1 - (-2)^n},$$

sauf si $n = 0$ auquel cas la somme vaut $u_0 = 1$.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. L'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$ est la réunion des parties deux à deux disjointes $\{2p1, 2p\}$ pour p variant de 1 à n . Or $(1)^{2p1}(2p1) + (1)^{2p}2p = 2p(2p1) = 1$ pour tout $1 \leq p \leq n$, donc la somme est égale à n .

2. Initialisation : On commence par vérifier la propriété pour $n = 1$. On a

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^k k = -1 \text{ et } \frac{(-1)^1(2 \times 1 + 1) - 1}{4} = -1$$

ce qui prouve bien l'égalité voulue. Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n et prouvons-là au rang $n + 1$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{n+1} (n+1) \\ &= \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1} (n+1) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (-2n-1+4n+4) - 1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (2(n+1)+1) - 1}{4} \end{aligned}$$

ce qui démontre bien la propriété au rang $n + 1$. Remarquons que le passage de la première à la deuxième ligne utilise l'hypothèse de récurrence. Si on somme jusque $2n$ au lieu de n , on trouve que

$$S_{2n} = \frac{4n+1-1}{4} = n.$$

Correction de l'exercice 20 ▲

C'est un exercice extrêmement classique qu'il faut savoir faire.

1. On reconnaît une somme géométrique de raison x . Pour $x \neq 1$, on a

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Pour $x = 1$, $S_n(1) = n + 1$.

2. On distingue là encore le cas $x = 1$. Il donne

$$T_n(1) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sinon, on dérive S_n : pour tout $x \neq 1$,

$$S'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \implies T_n(x) = xS'_n(x).$$

On calcule alors $S'_n(x)$ avec la formule obtenue à la question précédente et on trouve

$$T_n(x) = x \frac{nx^{n+1}(n+1)x^n + 1}{(x1)^2}.$$

Correction de l'exercice 21 ▲

1. On convient que $A_{-1} = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k B_k &= \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1}) B_k \\ &= \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\ &= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\ &= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k. \end{aligned}$$

2. On pose $a_k = 2^k$ et $B_k = k$. Alors $A_n = 2^{n+1} - 1$ et $b_k = 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k 2^k &= (2^{n+1} - 1)n - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) \\ &= (2^{n+1} - 1)n - 2(2^n - 1) + n \\ &= 2^{n+1}(n-1) + 2. \end{aligned}$$

Ce procédé de transformation de somme s'appelle une sommation d'Abel.

Correction de l'exercice 22 ▲

1. On fait la somme sur tous les indices i, j tels que $0 \leq i \leq j \leq n$. On a donc

$$S_1 = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{i,j}.$$

Une autre façon de le voir est de poser $b_{i,j} = a_{i,j}$ si $j \geq i$ et $b_{i,j} = 0$ si $j < i$. Alors on a

$$S_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n b_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n b_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{i,j}.$$

2. On reproduit "l'astuce" précédente en posant $b_{i,j} = a_{i,j}$ si $j \leq n-i$ et $b_{i,j} = 0$ sinon. Il vient

$$S_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n b_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n b_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} a_{i,j}.$$

3. On recommence comme à la première question, en posant $b_{i,j} = a_{i,j}$ si $j \geq i$ et $b_{i,j} = 0$ si $j < i$. Alors on a

$$S_3 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{i,j} = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n b_{i,j} = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{\min(n,j)} a_{i,j}.$$

La principale difficulté ici vient du fait de ne pas oublier le minimum car j peut dépasser n , ce qui n'est pas le cas de i .

Correction de l'exercice 23 ▲

1. On reconnaît simplement un produit :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. On va mettre la somme sur j à l'extérieur, et la somme sur i à l'intérieur. On trouve

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq n} (j+1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+3)}{2} \\ &= \frac{n(n+3)}{4}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 24 ▲

L'idée pour réaliser ce calcul est de permuter l'ordre de sommation, pour sommer d'abord sur j puis ensuite sur k . On remarque qu'alors j varie entre 1 et n , puis que k varie entre j et n . On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 2^k &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n 2^k \\ &= \sum_{j=1}^n (2^{n+1} - 2^j) \\ &= n2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 25 ▲

1. On écrit que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij &= \sum_{j=1}^n j \left(\sum_{i=1}^j i \right) \\ &= \sum_{j=1}^n ja_j \\ &= \sum_{j=1}^n j \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j^3 + \sum_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \frac{c_n + b_n}{2}. \end{aligned}$$

En remplaçant par les valeurs données dans l'énoncé et après réduction au même dénominateur, on trouve

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.$$

2. Posons, pour $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé, $S_i = \sum_{j=1}^n \min(i, j)$ et commençons par calculer la valeur de S_i . Alors on a

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i \\ &= \frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)i - \frac{i^2}{2} \end{aligned}$$

(on pourra remarquer que ceci fonctionne encore si $i = n$, auquel cas la deuxième somme est réduite à 0). On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) &= \sum_{i=1}^n S_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(n + \frac{1}{2}\right)i - \frac{i^2}{2} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 26 ▲

1. On sait que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{p \times (p-1)!(n-p)!} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}.$$

2. On a

$$(n+1)! - n! = (n+1)n! - n! = (n+1-1)n! = n \times n!$$

On a

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2).$$

On a

$$\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{n+2}{n+1} - 1 \right) = \frac{1}{(n+1)!}.$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{b^{2n}}{b^{2n+2}} = \frac{a}{(n+1)b^2}.$$

3. On a

$$(n+1)! - n! = (n+1)n! - n! = (n+1-1)n! = n \times n!$$

4. On a

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2).$$

5. On a

$$\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{n+2}{n+1} - 1 \right) = \frac{1}{(n+1)!}.$$

6. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{b^{2n}}{b^{2n+2}} = \frac{a}{(n+1)b^2}.$$

Correction de l'exercice 27 ▲

1. On fait le quotient des deux nombres :

$$\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p+1}} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \times \frac{(p+1)!}{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)} = \frac{p+1}{n-p}.$$

Ceci est inférieur strict à 1 si et seulement si

$$\frac{p+1}{n-p} < 1 \iff p < \frac{n-1}{2}.$$

2. La question précédente montre que la suite des coefficients binômiaux $\binom{n}{q}$ croît strictement avec q pour q allant de 0 à $\frac{n-1}{2}$ et on montrerait de la même façon qu'elle décroît strictement pour q allant de $\frac{n+1}{2}$ à n . L'égalité

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$$

peut donc avoir lieu au plus pour deux valeurs de q , l'une avec q dans $0, \dots, \frac{n-1}{2}$, l'autre avec q supérieur ou égal à $\frac{n+1}{2}$. Or, on a bien deux solutions, qui sont $q = p$ et $q = n - p$. Ces solutions sont distinctes sauf si $n = 2p$. Et dans ce cas, il n'y a qu'une seule solution (c'est le coefficient binomial le plus grand).

Correction de l'exercice 28 ▲

1. On va utiliser la formule du binôme. On calcule les coefficients binômiaux par exemple en utilisant le triangle de Pascal. On en déduit

$$(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1.$$

$$(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1.$$

2. Il suffit de remarquer que $2^n = (1+1)^n$, et de développer ceci en utilisant la formule du binôme.

3. C'est presque le même raisonnement. Cette fois, on écrit que

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^{n-p} 2^p = (1+2)^n = 3^n.$$

4. C'est un peu plus difficile. En remarquant que k et $2n-k$ ont la même parité, on a

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} 2^k = \frac{1}{2} (-1+2)^{2n} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} - \frac{1}{2} = 0.$$

Correction de l'exercice 29 ▲

1. On commence par développer en écrivant $(a+b+c)^7 = ((a+b)+c)^7$. Il vient :

$$(a+b+c)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} (a+b)^{7-k} c^k.$$

Le terme devant a^2b^4c ne peut être issu que du produit $(a+b)^6c$. Or,

$$(a+b)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} a^k b^{6-k}.$$

On en déduit que le coefficient devant a^2b^4c est

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{2} = 7 \times \frac{6 \times 5}{2} = 105.$$

2. On développe $(1+t)^n$ avec la formule du binôme :

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k.$$

On intègre ensuite cette formule entre 0 et x , et on trouve

$$\int_0^x (1+t)^n dt = \int_0^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k dt$$

soit

$$\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} x^{k+1}.$$

Il suffit ensuite de faire $x = 1$ pour trouver le résultat :

$$\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

3. On va chercher le coefficient devant x^p de $(1+x)^m$. D'une part, par la formule du binôme de Newton, il est égal à $\binom{m}{p}$. D'autre part, on écrit

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= (1+x)^q (1+x)^{m-q} \\ &= \left(\sum_{j=0}^q \binom{q}{j} x^j \right) \left(\sum_{l=0}^{m-q} \binom{m-q}{l} x^l \right). \end{aligned}$$

Le coefficient devant x^p est alors obtenu en prenant les produits des termes en x^j et x^l avec $l = p - j$. j parcourt donc l'intervalle $\{0, \dots, q\}$ et on a :

$$\binom{m}{p} = \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} \times \binom{m-q}{p-j},$$

ce qui est bien le résultat demandé.

Correction de l'exercice 30 ▲

Une méthode naturelle pour démontrer cette propriété est de procéder par récurrence sur n . La formule est clairement vraie pour $n = 0$ (ce qui implique $p = 0$). Supposons la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire que pour tout $p \leq n$, la formule donnée est vérifiée. Prouvons-la au rang $n+1$. Pour cela, prenons $p \leq n+1$. Si $p \leq n$, alors on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= \binom{n+2}{p+1} \text{ (formule du triangle de Pascal).} \end{aligned}$$

Si $p = n + 1$, la formule est aussi vérifiée. La propriété est donc aussi vraie au rang $n + 1$.

Correction de l'exercice 31 ▲

Développons $(x + y + z)^n$ en appliquant deux fois la formule du binôme, la première fois en écrivant que

$$(x + y + z)^n = ((x + y) + z)^n.$$

Il vient

$$(x + y + z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x + y)^k z^{n-k} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} z^{n-k}.$$

Dans le développement de $(x + y + z)^n$ n'interviennent que des termes $x^a y^b z^c$ avec $a + b + c = n$. A un tel triplet (a, b, c) donné correspond un unique couple (k, j) avec $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq j \leq k$ tel que $a = j$, $b = k - j$ et $c = n - k$ (on a alors $k = a + b$). Le coefficient intervenant devant $x^a y^b z^c$ est donc

$$\binom{n}{a+b} \binom{a+b}{a} = \frac{n!}{(a+b)!c!} \times \frac{(a+b)!}{a!b!} = \frac{n!}{a!b!c!}.$$

Correction de l'exercice 32 ▲

Introduisons les polynômes $P(x) = (x + 1)^n$, $Q(x) = (x - 1)^n$, et cherchons le coefficient devant x^n du produit PQ . On a d'une part,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \text{ et } Q(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

Le coefficient devant x^n du produit PQ est donc

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 = S_n.$$

D'autre part, on a

$$PQ(x) = (x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^{2k}.$$

On distingue alors deux cas. Si n est impair, le coefficient devant x^n est nul, et on a donc $S_n = 0$. Si $n = 2p$ est pair, alors on a

$$S_{2p} = (-1)^p \binom{2p}{p}.$$

Pour calculer T_n , il faut penser à dériver. On a

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \text{ et } P'(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

Si on cherche le coefficient devant x^{n-1} du produit $P'P$, on trouve

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \binom{n}{k} = T_n.$$

D'autre part, on a

$$P'P(x) = n(x + 1)^{2n-1} = n \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} x^k.$$

On en déduit que

$$T_n = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

Correction de l'exercice 33 ▲

1. On peut démontrer cette propriété par récurrence sur n . Mais il est plus facile de remarquer que, par la formule donnant la somme des premiers termes d'une somme géométrique,

$$\sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p = \frac{1 - (1-x)^n}{1 - (1-x)} = \frac{1 - (1-x)^n}{x}.$$

2. On commence par dériver f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{k-1}.$$

Pour x non nul, cela s'écrit encore

$$f'(x) = \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^k}{x} = \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k x^k}{x}.$$

On peut alors utiliser la formule du binôme pour écrire

$$f'(x) = \frac{(1-x)^n - 1}{x} = - \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p$$

où la dernière égalité provient de la question précédente. Ceci est encore vrai pour $x = 0$ puisque $f'(0) = -n$.

3. Remarquons que la somme que l'on cherche à calculer vaut $-f(1)$. Intégrons alors l'égalité précédente entre 0 et 1. On a

$$\int_0^1 f'(x) dx = - \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^1 (1-x)^p dx.$$

Mais,

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = f(1)$$

et

$$\int_0^1 (1-x)^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

On conclut que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -f(1) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Correction de l'exercice 34 ▲

1. C'est une conséquence de la formule du binôme. En effet, on a

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} (\sqrt{2})^{n-k}.$$

Or, $(\sqrt{2})^{n-k}$ est ou bien égal à un entier naturel (non nul) si $n-k$ est pair, ou de la forme $m\sqrt{2}$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ si $n-k$ est impair. En regroupant les termes pour lesquels $n-k$ est pair, on trouve x_n et en regroupant les termes pour lesquels $n-k$ est impair, on trouve $y_n\sqrt{2}$. Rappelons que le coefficient binomial est lui aussi un entier.

2. On va développer de deux façons différentes $(3 + 2\sqrt{2})^{n+1}$. D'une part on a

$$(3 + 2\sqrt{2})^{n+1} = x_{n+1} + \sqrt{2}y_{n+1}.$$

D'autre part, on a

$$(3 + 2\sqrt{2})^{n+1} = (3 + 2\sqrt{2})^n (3 + 2\sqrt{2}) = (x_n + \sqrt{2}y_n)(3 + 2\sqrt{2}) = (3x_n + 4y_n) + (2x_n + 3y_n)\sqrt{2}.$$

On en déduit que $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ et $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$.

3. On a $x_{n+1} - x_n \geq 2x_n > 0$ et $y_{n+1} - y_n \geq 2y_n > 0$, donc les deux suites sont strictement croissantes.

4. Puisque les suites sont strictement croissantes, les couples (x_n, y_n) sont tous différents. Il suffit donc de démontrer que, pour tout entier n , on a $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$. Pour cela, il suffit de remarquer que

$$(3 - 2\sqrt{2})^n = x_n - \sqrt{2}y_n.$$

En effet, si on développe $(3 - 2\sqrt{2})^n$ par la formule du binôme, on trouve

$$(3 - 2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} 2^{n-k} (\sqrt{2})^{n-k}.$$

On regroupe les termes comme précédemment, sachant que pour les termes entiers, on a $n - k$ pair et donc $(-1)^{n-k} = 1$ et pour les termes de la forme $m\sqrt{2}$, on a $n - k$ impair et $(-1)^{n-k} = -1$. Ainsi, on a

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (x_n - \sqrt{2}y_n)(x_n + \sqrt{2}y_n) = (3 - 2\sqrt{2})^n (3 + 2\sqrt{2})^n = 1^n = 1.$$
